

DIE COLLATZ - VERMUTUNG – Zeitverschwendung oder was?

Die «Collatz - Vermutung» beschreibt eine mathematische Reihenentwicklung, deren Gesetzmässigkeit bis heute nicht bewiesen werden konnte. Die ganze Thematik ist in zahllosen Publikationen angesprochen und findet eine lesenswerte Zusammenfassung unter Wikipedia. → <https://de.wikipedia.org/wiki/Collatz-Problem>

Auszug Wikipedia:

Problemstellung [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Einleitung [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Bei dem Problem geht es um **Zahlenfolgen**, die nach einem einfachen Bildungsgesetz konstruiert werden:

- Beginne mit einer beliebigen **natürlichen Zahl** $n > 0$.
- Ist n gerade, so nimm als nächstes $n/2$.
- Ist n ungerade, so nimm als nächstes $3n + 1$.
- Wiederhole die Vorgehensweise mit der erhaltenen Zahl.

Zum Beispiel ergibt sich mit der Startzahl $n = 19$ die Folge

19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4,
2, 1, 4, 2, 1, ...

Die Folge tritt somit in einen Zyklus ein, in dem die Zahlen 4, 2, 1 ständig wiederholt werden.

Die Collatz-Vermutung lautet nun:

Die Zahlenfolge mündet immer in den Zyklus 4, 2, 1, egal, mit welcher positiven natürlichen Zahl man beginnt.

Diese Vermutung wurde bislang weder bewiesen noch widerlegt.

Von renommierten Mathematikern wurde dazu auch schon die Meinung vertreten, es sei ein hoffnungsloses Unterfangen und reine Zeitverschwendung, hierzu den stichhaltigen Beweis oder Gegenbeweis antreten zu wollen. Gerade diese «letzte Ungewissheit» weckt jedoch sowohl bei «Gamblern» (Glücksrittern) und Tüftlern die Versuchung, «es» auch

selbst einmal zu versuchen – dies umso mehr, als angeblich für die Vorlage eines stichhaltigen Beweises (oder Gegenbeweises) eine sehr hohe Geldsumme seitens eines japanischen Unternehmens in Aussicht gestellt worden ist.

Mit dem unten verlinkten Excel – File (zugänglich über ein umfangbedingtes «DROPBOX – Zwischenlager») soll zwar nicht eine «hoffnungslose Zeitverschwendung» gefördert – wohl aber ein «Spielgerät» zum vergnüglichen Zeitvertreib (und heimlichen Hoffnungsträger) zur Verfügung gestellt werden. Eine kurze Bedienungsanleitung und Interpretationshilfe sind in das Excel – File unter dem Reiter «zuerst lesen» eingefügt.

SPIELGERÄT ZUR COLLATZ - VERMUTUNG

ERWÄGUNGEN, WELCHE DEM «EXCEL – SPIELGERÄT» ZUGRUNDE LIEGEN

Als Erstes ist zu beweisen (resp. zu begründen), dass/weshalb die Zahlenreihe nicht in den Himmel wachsen kann, sondern dass sie stets einen (individuellen) Maximalwert erreicht und von dort nur noch abnimmt (**→ Teilbeweis a**).

Trifft dies zu, kann gefolgert werden, dass - spätestens dann, wenn gleichviele Schritte getätigt worden sind, wie der individuelle Maximalwert beträgt - irgendeine Zahl zum zweiten Mal erscheinen muss. Damit wird sich der Kreis ab dieser Zahl zwangsläufig schliessen, d.h. die weitere Zahlenreihe wird fortan eine wiederkehrende Schlaufe bilden.

Die Frage ist dabei die folgende:

ENTWEDER: Schliesst sich der Kreis beweisbar ERST mit der Zahlenfolge (4 – 2 – 1)? Dann ist die «Collatz – Vermutung» bestätigt.

ODER: Kann sich der Kreis beweisbar AUCH SCHON VORHER, d.h. ab einer Zahl >4 schliessen? Dann ist die «Collatz – Vermutung» widerlegt.

Es dürfte vermutlich (wenn überhaupt) leichter zu beweisen sein, dass sich in der erzeugten Zahlenreihe PRINZIPELL KEINE Zahl >4 wiederholen kann (VORGEHEN A), als dass es gelingt, IRGENDEINE Zahlenfolge zu finden, welche oberhalb der Zahl 4 in einen wiederkehrenden Umlauf mündet (VORGEHEN B). Im ersten Fall (A) wäre die «Collatz – Vermutung» bestätigt, weil die Zahlenfolge dann zwangsläufig immer bei (4 – 2- 1) enden müsste. Im zweiten Fall (B) wäre die «Collatz – Vermutung» hingegen eindeutig widerlegt.

Weitere Überlegungen, speziell zum favorisierten VORGEHEN A

Ab der frei gewählten, oder mittels Zufallsgenerator erzeugten Erstzahl (Z0) bildet sich nach der Entwicklungsregel eine «Perlenkette». Diese erreicht nach einer (individuellen) Anzahl Schritte ihren (individuellen) Maximalwert. Die Perlenkette reicht damit IN ERSTER BETRACHTUNG (1) von ihrer Erstzahl (Z0) über den Maximalwert (Zmax.) bis hin zu jener Zahl, welche als erste ein zweites Mal auftaucht (Laut «Collatz- Vermutung» ist

dies die Zahl 4). Ein Beispiel, das jedenfalls NICHT zutrifft: Wäre es die Zahl 271 (und nicht die Zahl 4), müsste sich danach eine wiederkehrende Schlaufe aus all jenen Zahlen bilden, welche zwischen eben dieser Zahl 271 und (erneut) der Zahl 271 auftreten.

In ZWEITER (2) UND DRITTER (3) BETRACHTUNG kann man sich aber auch fragen:

(2): Welche Vorläuferzahlen ($Z-x$) können – ohne dass sie den Maximalwert ($Z_{max.}$) übertreffen – zur Erstzahl (Z_0) führen und demzufolge vorgelagert an die Perlenkette anknüpfen, bzw. diese erweitern?

(3): Welche Vorläuferzahlen ($Z-x$) der Grösse $< (Z_{max.})$ können zu eben diesem Maximalwert führen und demzufolge ebenfalls eine erweiterte Perlenkette mit unverändertem Maximalwert und Fortgang bilden, dabei aber andere Vorläuferzahlen als bei Fragestellung (2) aufweisen?

Um die «Collatz – Vermutung» nach VORGEHEN A zu bestätigen, sind somit drei weitere Teilbeweise (b – d) erforderlich:

b) Es ist zu zeigen, dass sich KEINE zufällige Reihenentwicklung gemäss (1) mit einer Zahl >4 zu einer wiederkehrenden Schlaufe schliessen lässt (\rightarrow **Teilbeweis b**).

c) Es ist zu zeigen, dass bei der erweiterten Reihenentwicklung (2) KEINE der entstehenden Vorläuferzahlen (VZL) auch schon in der Reihenbildung AB Erstzahl (Z_0) vorhanden ist (\rightarrow **Teilbeweis c**).

d) Es ist zu zeigen, dass KEINE der zum Maximalwert ($Z_{max.}$) führenden (anderen) Vorläuferzahlen (VLZ) irgendwann eine Wiederholung AB Erstzahl (Z_0) findet.
(\rightarrow **Teilbeweis d**).

WICHTIG: Nicht alle Vorläuferzahlen (VLZ) aus c) oder d) liegen auf einer durchgehenden Perlenschnur! Es dürfen nur (bzw. erst) jene VLZ zum Vergleich herangezogen werden, welche ohne Unterbrechung zur Erstzahl (Z_0) bzw. zur Maximalzahl ($Z_{max.}$) hinführen!

ALTERNATIV besteht immer auch die Möglichkeit, gemäss VORGEHEN B eine Zahlenreihe aufzuspüren, welche sich OBERHALB der Zahl 4 zu einem Kreis schliesst. Damit wäre dann die «Collatz – Vermutung» widerlegt.

Schlussbemerkung: Der geneigte Leser ist dazu eingeladen, sein Glück oder seinen Scharfsinn mit Hilfe des oben verlinkten Excel – Files «zu aktivieren» - unter dem Verdacht, dass vielleicht doch alles «zur hoffnungslosen Zeitverschwendung verkommt».